

POSICIONES RELATIVAS

Lo primero que tenemos que tener claro a la hora de estudiar la posición relativa entre varios objetos geométricos es qué posibilidades existen. Después, en función de las ecuaciones de las que dispongamos, escogeremos entre una u otra posibilidad.

El teorema de Rouché-Fröbenius nos dirá el número de soluciones, de tenerlas, del sistema formado por todas las ecuaciones, lo cual en términos geométrico corresponde a los puntos en común de los objetos estudiados: un punto, una recta, un plano...

Después, fijándonos en los vectores directores de rectas y planos o en el vector normal de los planos, podremos completar el estudio.

Otro problema distinto es hallar los puntos en común que puedan existir. Para ello habrá que resolver en cada caso el sistema de ecuaciones formado las ecuaciones de las rectas y planos que se estudien.

1. ENTRE DOS PLANOS

Dos planos pueden ser:

- a) Coincidentes.
- b) Paralelos.
- c) Secantes (se cortan en una recta)

Una forma de estudiar la posición relativa entre dos planos es comparar sus ecuaciones generales:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\sigma: A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$	Una ecuación es proporcional a la otra, luego son coincidentes .
$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$	Los vectores normales son paralelos pero los planos no son iguales por no ser proporcionales sus ecuaciones, luego son paralelos .
$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \text{ o } \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Los vectores normales no son paralelos, luego son secantes (se cortan en una recta).

Otra forma de estudiar la posición relativa es comparar los rangos de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

rg A = rg A* = 1	Sistema compatible e indeterminado. La dimensión del conjunto de soluciones es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de M y M*: Dim = 3 - 1 = 2, es decir, un plano. Si dos planos se cortan en un plano, es que son coincidentes.
rg A = 1 rg A* = 2	Sistema incompatible. Son paralelos .
rg A = rg A* = 2	Sistema compatible e indeterminado. La dimensión del conjunto de soluciones es: Dim = 3 - 2 = 1, es decir, una recta, luego son secantes (se cortan en una recta).

Nota: es obvio que el sistema formado por las ecuaciones de los planos nunca puede ser compatible y determinado.

2. ENTRE TRES PLANOS

Entre tres planos tenemos las siguientes posibilidades:

- Tres planos coincidentes.
- Tres planos paralelos.
- Dos coincidentes paralelos al tercero.
- Dos coincidentes cortan al tercero.
- Se cortan en una recta sin ser coincidentes.
- Dos paralelos cortan al tercero.
- Se cortan dos a dos.
- Se cortan en un punto.

Dadas las ecuaciones generales de tres planos

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\sigma: A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\tau: A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

vamos a estudiar su posición relativa comparando los rangos de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

rg A = rg A* = 1	Sistema compatible e indeterminado. La dimensión del conjunto de soluciones es: $\dim = 3 - 1 = 2$, es decir, un plano. Luego son coincidentes .
rg A = 1 rg A* = 2	Sistema incompatible. Al ser rg A = 1, los tres vectores normales son paralelos. Esto nos da dos posibilidades: - Los tres planos son paralelos. Dos de ellos son coincidentes y paralelos al tercero. Se distinguen estudiando los plano dos a dos.
rg A = rg A* = 2	Sistema compatible e indeterminado. La dimensión del conjunto de soluciones es: $\dim = 3 - 2 = 1$, es decir, una recta, luego son secantes (los tres planos se cortan en una recta). Esto nos da dos posibilidades: Dos planos coincidentes y secantes a un tercero. Tres planos distintos secantes. Se distinguen estudiando los plano dos a dos.
rg A = 2 rg A* = 3	Sistema incompatible. Al ser rg A = 2, los tres vectores normales son coplanarios. Esto nos da dos posibilidades: Dos planos paralelos y uno secante. Tres planos secantes dos a dos (la tienda de campaña). Se distinguen estudiando los plano dos a dos.
rg A = rg A* = 3	Sistema compatible y determinado. Los tres planos se cortan en un punto .

3. DOS RECTAS

Entre dos rectas tenemos las siguientes posibilidades:

- a) Son coincidentes.
- b) Paralelas.
- c) Se cortan.
- d) Se cruzan (esta es una novedad del espacio tridimensional. En dos dimensiones no es posible).

Un método es ver la relación entre los vectores directores de cada recta y un tercer vector que une un punto cualquiera de una recta con un punto cualquiera de la otra recta. Es apropiado para cuando tenemos las ecuaciones vectoriales o paramétricas de las rectas.

Sean las rectas:

$$r: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3)$$

$$s: (x, y, z) = (b_1, b_2, b_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

Consideramos entonces las matrices

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

y

$$A^* = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & b_1 - a_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 - a_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 1$	Los tres vectores son paralelos. Las rectas son, necesariamente, coincidentes .
$\text{rg } A = 1$ $\text{rg } A^* = 2$	$\text{Rg } A = 1$ quiere decir que los vectores directores de las rectas son paralelos, pero no es paralelo el vector que une dos de sus puntos, por lo que las rectas no son coincidentes, luego son paralelas .
$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2$	Que $\text{rg } A = 2$ implica que los vectores directores no son paralelos. Que $\text{rg } A^* = 2$ implica que los tres vectores son coplanarios. Esto solo es posible si las rectas se cortan en un punto.
$\text{rg } A = 2$ $\text{rg } A^* = 3$	Si los tres vectores son linealmente independientes es que llena el espacio. Las dos rectas se cruzan .

Otro método consiste en aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius al sistema formado por las cuatro ecuaciones generales de las dos rectas.

Sean las rectas

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

Consideramos entonces las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix}$$

y

$$A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

rg A = rg A* = 2	Sistema compatible e indeterminado. La dimensión del conjunto de soluciones es: $\dim = 3 - 2 = 1$, es decir, que se cortan en una recta, luego son coincidentes .
rg A = 2 rg A* = 3	Sistema incompatible. Rg A = 2 quiere decir que los vectores normales de los cuatro planos son coplanarios, lo que implica que las dos rectas tienen direcciones iguales. Al no tener puntos en común, son paralelas .
rg A = rg A* = 3	Sistema compatible y determinado. Se cortan en un punto.
rg A = 3 rg A* = 4	Sistema incompatible. Rg A = 3 quiere decir que los vectores normales de los cuatro planos no son coplanarios, lo que implica que las dos rectas tienen direcciones distintas. Al no tener puntos en común, se cruzan .

4. RECTA Y PLANO

Entre recta y plano tenemos las siguientes posibilidades:

- a) La recta está contenida en el plano.
- b) Son paralelos.
- c) Se cortan en un punto.

Una forma de ver la cuestión es estudiar el sistema formado por las ecuaciones generales de recta y plano.

Sea la recta

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

y el plano:

$$\pi: A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$

$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 2$	Sistema compatible e indeterminado. La dimensión del conjunto de soluciones es: $\dim = 3 - 2 = 1$, es decir, una recta. Luego la recta está contenida en el plano .
$\text{rg}A = 2$ $\text{rg}A^* = 3$	Sistema incompatible. Recta y plano son paralelos .
$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 3$	Sistema compatible y determinado. Recta y plano se cortan en un punto.

Nota: el rango de A no puede ser menor que dos porque en tal caso r no sería una recta.

Otro método es sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación general del plano (es decir, resolver el sistema) y ver qué sale.

Sean la recta $r: \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$

y el plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

Sustituyendo queda $A(a_1 + \lambda u_1) + B(a_2 + \lambda u_2) + C(a_3 + \lambda u_3) + D = 0$, que es una ecuación de primer grado con incógnita λ .

¿Qué puede pasar?

- a) Que salgan infinitas soluciones. Entonces **la recta está contenida en el plano**.
- b) Que la ecuación no tenga solución, lo que implica que **la recta y el plano son paralelos**.
- c) Que la ecuación tenga solución única, es decir, que **la recta y el plano se cortan en un punto**.